

Contrôle continu N°2

Les documents et la calculatrice sont interdits.

1. Questions de cours

Les réponses aux questions de cours **ne nécessitent pas** de justifications.

Question 1 : Pour les espaces métriques : donner la définition d'un ensemble connexe, puis donner ensuite une autre caractérisation de la connexité.

Question 2 : Rappeler les implications entre connexité, convexité, connexité par arcs.

Question 3 : Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés. Donner un exemple de norme sur l'espace des applications linéaires continues de E dans F .

Question 4 : Soit une application f définie sur un ouvert Ω d'un espace vectoriel normé E , à valeurs dans un autre espace vectoriel normé F , et un point a de Ω . Que signifie f est différentiable en a . On précisera le sens de tous les termes.

2. Exercices

2.1. Exercice 1 : Connexité

Soit E un espace vectoriel. On dit qu'une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est localement constante si en tout point x de E , il existe un ouvert qui contient x sur lequel f est constante. Montrer que E est connexe si et seulement si toute fonction localement constante est constante.

Indication : Pour l'implication, on pourra considérer l'ensemble $\Omega = \{x \in E, f(x) = f(0)\}$.

2.2. Exercice 2 : Espace vectoriel normé

1) Soit f une application linéaire de E dans F . Montrer que f est continue sur E si et seulement si f est bornée sur la boule unité fermée de E .

2) Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels en X . On le munit de la norme $\|\sum_i a_i X^i\| = \sup_i |a_i|$ (c'est à dire le sup des coefficients) et on admet que c'est bien une norme. Soit $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ telle que $f(P) = P'$ le polynôme dérivé. Montrer que f n'est pas continue.

2.3. Exercice 3 : Différentiabilité

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable en 0 et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, (x \neq 0), \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(tx) = tf(x).$$

1) Montrer que $f(0) = 0$.

2) Montrer que f est linéaire. On pourra faire un développement limité de $f(tx)$.

2.4. Exercice 4 : Espace vectoriel normé et différentiabilité

On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|A\| = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$ avec $A = (a_{i,j})_{i,j}$. On ne demande pas de montrer que $\|\cdot\|$ est bien une norme.

1) Montrer que $\|AB\| \leq n\|A\|\|B\|$.

2) Étudier la différentiabilité de l'application $f : A \rightarrow A^3$ de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$.