

Prénom :

Nom :

Contrôle continu N°1

La calculatrice et les documents de cours sont interdits.

1. Questions de cours

Question 1 : Soit (X, d) un espace métrique et E une partie quelconque de X . Rappeler la définition de $\text{Inte}(E)$ (l'intérieur de E) donnée dans le cours puis montrer que $x \in \text{Inte}(E) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset E$.

Question 2 : Soit (X, d) un espace métrique et (Y, d) un sous-espace métrique de (X, d) muni de la topologie induite. Donner une caractérisation des ouverts de (Y, d) .

Question 3 : Rappeler la définition d'une suite de Cauchy.

Question 4 : Énoncer le théorème du point fixe.

Question 5 : Définir la compacité pour un espace topologique.

2. Exercices

2.1. Exercice 1 : Adhérence d'une suite

1. Soit $(x_n)_n$ une suite de (X, d) un espace métrique. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérences de $(x_n)_n$ noté $\text{Adh}(x)$ vérifie la relation

$$\text{Adh}(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{x_k, k \geq n\}}.$$

2. En déduire que $\text{Adh}(x)$ est fermé.

2.2. Exercice 2 : Distance à un fermé

Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soit A un sous ensemble de X . Pour $x \in X$ on note $d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x, y)$. Montrer que d_A est bien définie puis que d_A est lipschitzienne.

2. Montrer que $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \bar{A}$.

3. Soit A et B deux parties de E telles que $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$. Montrer que l'application

$$f(x) = \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$$

est définie et continue sur X . Que vaut-elle sur A , sur B ?

4. En déduire qu'il existe deux ouverts U et V disjoints tels que $\bar{A} \subset U$ et $\bar{B} \subset V$.

2.3. Exercice 3 : Compacité

Soit (X, d) un espace métrique compact et soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . Montrer qu'il existe un $\lambda > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe $i_x \in I$ tel que la boule ouverte $B(x, \lambda)$ soit incluse dans O_{i_x} . (On pourra raisonner par l'absurde).

2.4. Exercice Bonus

A faire uniquement si vous avez fini les exercices précédents. Cet exercice ne peut que rapporter des points en plus. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $E \subset X$. On dit que E est précompact si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir E par un nombre fini de boule de rayon ε . Montrer que E est précompact si et seulement si toute suite de E admet une sous-suite de Cauchy.