

Prénom :

Nom :

Contrôle blanc N°1

Les documents et la calculatrice sont interdits.

1. Question de cours

Question 1 : Énoncer la propriété de Bolzano-Weierstrass pour un ensemble compact.

Question 2 : Montrer que tout espace fermé d'un espace métrique compact est compact.

Question 3 : Dans $X = \mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, est-ce que l'ensemble $\{x \in X, \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\}$ vu comme sous-ensemble de X est ouvert ? fermé ? compact ?

2. Exercices

2.1. Exercice 1 : Compacité

1) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente d'un espace métrique (X, d) , l sa limite. Montrer que l'ensemble $\Gamma = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact.

2) Soit (X', d') un autre espace métrique et $f : (X, d) \rightarrow (X', d')$ une application continue telle que pour tout compact K de X' , $f^{-1}(K)$ est compact. Montrer que l'image de tout fermé par f est un fermé. (On pourra utiliser la question 1 de cet exercice).

3) Existe-t-il des applications continues qui ne sont pas fermées ? (c'est-à-dire telles que l'image de tout fermé est un fermé).

2.2. Exercice 2 : Distance dans un espace métrique

1) Soit X un espace topologique et d, d' deux distances sur X . Montrer que d et d' sont topologiquement équivalentes (c'est-à-dire les ouverts de (X, d) sont des ouverts de (X, d') et réciproquement) si et seulement si l'application identité de (X, d) sur (X, d') est un homéomorphisme.

2) On munit l'espace $]0, +\infty[$ de la distance $\delta(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$. Montrer que δ est bien une distance sur $]0, +\infty[$.

3) En utilisant la question 1 de cet exercice, montrer que sur $]0, +\infty[$, d et δ sont des distances topologiquement équivalentes.

4) Montrer que $(]0, +\infty[, \delta)$ n'est pas complet.

2.3. Exercice 3 : Complétude

1) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2 < 1$. Montrer que pour tout $b = (b_1, \dots, b_n)$, le système

$$\forall i \in 1, \dots, n, \quad x_i - \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i$$

admet une unique solution. Indication : Titre de l'exercice.